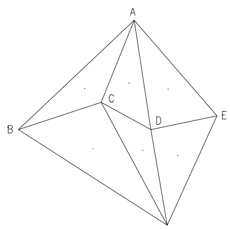
## II. DAS DOPPELVIERECK

**(1)** Sind C und D zwei benachbarte Ecken vom Grad 4, so erzeugen die Dreiecke, die C oder D als Eckpunkt besitzen, ein "*Doppelviereck*" (Abb.3). Diese Bezeichnung kommt daher, daß den beiden Ecken C und D im polaren Polyeder zwei benachbarte Vierecke entsprechen. Wir vereinbaren, daß wir im weiteren unter der Fläche eines Doppelvierecks die Summe der Flächeninhalte und unter seinem Volumen die Summe der Volumina seiner Dreiecke verstehen. Weiters sind ACD und CDF die *inneren* und die übrigen die *äußeren* Dreiecke des Doppelvierecks, und eine Ecke des Polyeders heißt zum Doppelviereck benachbart, wenn sie zu C oder D benachbart ist, d.h. wenn sie mit einer der Ecken A, B, E oder F übereinstimmt.




Um das Volumen des Doppelvierecks nach oben abschätzen zu können, sei 4x die Summe der Winkel der inneren Dreiecke bei C und D, 4y sei die Winkelsumme der inneren Dreiecke bei A und F. Analogerweise sei 8w die Winkelsumme der äußeren Dreiecke bei C und D und 8z sei die Winkelsumme der äußeren Dreiecke bei A, B, F und E. Dann ist $2w+x = \pi$, und die Fläche des Doppelvierecks beträgt $4\cdot(y+2z)-2\pi$.

Der Eckensinus eines inneren Dreiecks ist kleiner oder gleich dem Eckensinus eines gleichschenkeligen flächengleichen Dreieckes mit demselben Winkel bei A bzw. F; ebenso ist der Eckensinus eines äußeren Dreiecks kleiner oder gleich dem Eckensinus eines gleichschenkeligen flächengleichen Dreieckes mit demselben Winkel bei C bzw. D [Lemma 3]. Die Funktion G = G(x,y) ist als Funktion des Basiswinkels und des halben Winkels an der Spitze streng konkav; daher ist das Volumen des Doppelvierecks kleiner oder gleich: $H = 2\cdot G(y,\pi-2w)+4\cdot G(w,z)$.

Das Volumen eines Polyeders, das ein Doppelviereck enthält, ist somit kleiner oder gleich:

$$w_1 = 2\cdot G(y,\pi-2w)+4\cdot G(w,z) + (2n-10)\cdot U\left(\frac{6\pi-4\cdot(y+2z)}{2n-10}\right).$$

Enthält das Polyeder weiters eine zu dem Doppelviereck nicht benachbarte Ecke vom Grad 4 und Fläche t, so ist sein Volumen kleiner oder gleich:

$$w_2 = 2\cdot G(y,\pi-2w)+4\cdot G(w,z) + P(4,t) + (2n-14)\cdot U\left(\frac{6\pi-4\cdot(y+2z)\ -\ t}{2n-14}\right);$$

besitzt das Polyeder zwei nicht benachbarte Doppelvierecke, so ist sein Volumen kleiner oder gleich:

$$w_3 = 4 \cdot G(y,x) + 8 \cdot G(w,z) + (2n-16) \cdot U\left(\frac{8\pi - 8 \cdot (y+2z)}{2n-16}\right);$$

dabei verstehen wir hier unter x, y, z, w die Mittelwerte der entsprechenden Winkel der beiden Doppelvierecke.

Aus der strengen Konkavität von G und U folgt die strenge Konkavität dieser Funktionen, und wir erhalten folgende Maximalwerte.

| n | | $w_1$ | | $w_2$ | | $w_3$ | | vgl |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | | *2.05788* | | *2.04595* | | 2.0260 | | 2.04375 |
| 10 | | *2.22629* | | 2.21308 | | | | 2.21871 |
| 11 | | *2.37184* | | *2.35816* | | 2.3344 | | 2.35463 |
| 12 | | 2.49865 | | | | | | 2.53615 |
| 13 | | 2.60992 | | | | | | 2.61283 |
| 14 | | 2.70815 | | | | | | 2.72096 |

Somit kann das für n = 12, 13 oder 14 optimale Polyeder kein Doppelviereck besitzen. Besitzt ein 10-eckiges Polyeder ein Doppelviereck und eine dazu nicht benachbarte Ecke vom Grad 4, so kann es nicht optimal sein, und die für n = 9 bzw. n = 11 optimalen Polyeder besitzen nicht zwei zueinander nicht benachbarte Doppelvierecke. Diese Angaben reichen aus, für n = 9 und n = 14 den Typus des optimalen Polyeders eindeutig zu bestimmen; für n = 10 können wir die Anzahl der für das optimale Polyeder möglichen Polyedertypen auf zwei zu reduzieren. Für n = 9, 10 genügt ein Blick auf die Brückner'schen Listen [*s*. Abb. 1 und Abb. 2]; die Behauptung für n = 14 wird in Kapitel **IV** bewiesen. Somit ist das für n = 9 optimale Polyeder vom Typ Nr. 33 und das für n = 10 optimale Polyeder vom Typ Nr. 84 oder Nr. 85 der entsprechenden Brückner'schen Liste.

Diese Überlegungen für das Doppelviereck können wir auch für eine Ecke C vom Grad 4, die zu einer Ecke D vom Grad k benachbart ist, verwenden; C und D seien - wie beim Doppelviereck - zu A und F benachbart; die Dreiecke um C und D zusammen wollen wir als 4-k-Eck bezeichnen; ACD und DCF sind, analog zum Doppelviereck, seine *inneren* Dreiecke, die übrigen Dreiecke um C seien die *linken*, die übrigen Dreiecke um D die *rechten* Dreiecke des 4-k-Ecks. Dann sei 2a die Summe der Winkel der inneren Dreiecke bei C und 2b die Summe der inneren Dreiecke bei D. Die Summe der Winkel der inneren Dreiecke bei A und F sei 4y. Dann ist die Summe der Winkel der linken Dreiecke bei C gegeben durch 2π-2a, und die der rechten bei D durch 2π-2b; die durchschnittliche Summe der Winkel der linken Dreiecke, die nicht zu C gehören sei x, der analoge Wert bei den rechten Dreiecken sei z.

Somit ist die Fläche der linken Dreiecke gegeben durch $4\cdot(\frac{\pi-a}{2}+x-\frac{\pi}{2})$, die der rechten durch $2\,(k-2)\cdot(\frac{\pi-b}{k-2}+z-\frac{\pi}{2})$, und die Fläche der inneren Dreiecke beträgt $4\cdot(y+\frac{a+b}{2}-\frac{\pi}{2})$.

Daher ist der Flächeninhalt des 4-k-Ecks gegeben durch:

$$g(4,k) \;=\; 4\cdot(\frac{\pi-a}{2}+x-\frac{\pi}{2}) \;+\; 4\cdot(y+\frac{a+b}{2}-\frac{\pi}{2}) \;+\; 2\,(k-2)\cdot(\frac{\pi-b}{k-2}+z-\frac{\pi}{2})$$

Das Volumen der inneren Dreiecke ist analog zu den obigen Überlegungen kleiner oder gleich dem Volumen zweier kongruenter gleichschenkeliger Dreiecke mit Winkel 2y an der Spitze und Basiswinkel (a+b)/2. Ebenso ist das Volumen der linken Dreiecke kleiner oder gleich dem Volumen kongruenter gleichschenkeliger Dreiecke mit Winkel π-a an der Spitze und Basiswinkel x, und das Volumen der rechten Dreiecke ist kleiner oder gleich dem Volumen kongruenter gleichschenkeliger Dreiecke mit Winkel π-b an der Spitze und Basiswinkel z.

Somit ist das Volumen eines n-eckigen Polyeders, das ein Doppelviereck und ein dazu nicht benachbartes 4-k-Eck besitzt, kleiner oder gleich:

$$w_4 = \; A(4,4)+A(4,k) \;+\; (2n-10-(k+2))\cdot U(\frac{4\pi-g(4,4)-g(4,k)}{2n-10-(k+2)}),$$

wo $A(4,k) \;=\; 2\cdot G(\frac{\pi-a}{2},x) \;+\; 2\cdot G(y,\frac{a+b}{2}) \;+\; (k-2)\cdot G(\frac{\pi-b}{k-2},z)$ und

$$g(4,k) \;=\; 4\cdot(\frac{\pi-a}{2}+x-\frac{\pi}{2}) \;+\; 4\cdot(y+\frac{a+b}{2}-\frac{\pi}{2}) \;+\; 2\,(k-2)\cdot(\frac{\pi-b}{k-2}+z-\frac{\pi}{2})$$

Für n = 11 und k = 4,5 oder 6 erhalten wir:

| k | | 4 | | 5 | | 6 | | max |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_4$ | | 2.33444 | | 2.31447 | | 2.25858 | | 2.35463 |

Dazu betrachten wir ein n-eckiges Dreieckspolyeder **P**, das ein Doppelviereck ABCDEF besitzt (dabei seien C und D die Ecken vom Grad 4), und das zudem eine weitere Ecke P vom Grad 4 enthält. Diese Ecke P sei zu Q, R, S und T benachbart. Sind nun diese Punkte zugleich Eckpunkte des Doppelvierecks, d.h stimmen die Mengen {A,B,F,E} und {Q,R,S,T} überein, so kann das Polyeder keinen weiteren Eckpunkt mehr besitzen, und es ist n = 7. Für n = 11 ist daher zumindest eine der Ecken Q, R, S, T zu C oder D nicht benachbart, und somit besitzt das Polyeder ein Doppelviereck und ein dazu nicht benachbartes 4-k-Eck. Dann ist das Volumen von **P** aber stets kleiner als das Volumen eines bereits bekannten 11-eckigen Polyeders. Für k = 4, 5 oder 6 folgt dies aus den obigen Überlegungen, für k = 3 oder k = 7, 8 ... haben wir dies bereits in **(I.7)** und **(I.8)** gezeigt. Somit kann das für n = 11 optimale Polyeder zu einem Doppelviereck keine weitere dazu nicht benachbarte Ecke vom Grad 4 besitzen. In Kapitel **IV** werden wir zeigen, daß es nur zwei Polyedertypen gibt, die diese Bedingung erfüllen und keine Ecke vom Grad 3 besitzen.

**(2)** Wir wissen bereits, daß das Mosaik des für n = 8 optimalen Polyeders sich in zwei nicht benachbarte Doppelvierecke zerlegen läßt. Nehmen wir an, diese sind kongruent und besitzen gewisse Symmetriebedingungen, so können wir zeigen [*s.*(**II.4)**], daß ein 8-eckiges Polyeder mit Volumen $\kappa = \sqrt{\dfrac{475+29\cdot\sqrt{145}}{250}} \approx 1.81572$ existiert. (Dazu siehe auch [3],[18],[27].)

Dann können wir zeigen:

**Proposition 2:** *Ist das Volumen* K *des 8-eckigen Polyeders* **P** *größer oder gleich* $\kappa \approx 1.81572$ *und besitzt* **P** *ein Doppelviereck* ABCDEF*, so ist das Volumen* S *des Doppelvierecks kleiner oder gleich dem Volumen eines flächengleichen Doppelvierecks, mit*

$$AC = CF = FD = DA\ ,\ AB = BF = FE = EA \text{ sowie } BC = CD = DE.$$

Beweis: Es ist $\kappa > (2n-5)\cdot U\,(\frac{4\pi}{2n-5}) \approx 1.76471$. Somit ist das Volumen von **P** größer als das Volumen eines Polyedermosaiks mit höchstens 2n-5 Dreiecken; daher besitzt jedes Dreieck des Mosaiks von **P** positiven Flächeninhalt und ein Volumen. Im folgenden sei ε stets die Fläche und S das Volumen des Doppelvierecks ABCDEF [zur Bezeichnung *s.* Abb.3].

**(a)** Wir halten beim Doppelviereck die Lage von A, B, D, E und F fest und verändern zunächst nur die Lage von C. Dadurch wird die Summe der Dreiecksflächen um C nicht geändert. Die Eckensinussumme dieser Dreiecke ist gegeben durch

$$S_1 = |A,B,C| + |B,F,C| + |F,D,C| + |D,A,C| = |A-F,B,C| + |F-A,D,C| = C\cdot(A-F)\times(B-D) =: C\cdot w.$$

Dabei wird w durch A, B, F, D festgelegt. Die Eckensinussumme der Dreiecke um C kann somit nur dann größtmöglich sein, wenn C und w in dieselbe Richtung weisen. Befindet sich nun W = w/|w| im Inneren von ABFD, so ist dies der Fall, wenn C und W zusammenfallen. Dann ist C orthogonal zu A-F und orthogonal zu B-D, d.h. es gilt AC = CF und BC = CD. Befindet sich W jedoch nicht im Inneren von ABFD, so nimmt $S_1$ bei dem Randpunkt von ABFD den größten Wert an, der W am nächsten liegt. Doch dann verschwindet zumindest ein Dreieck des Doppelvierecks, und das Volumen des Polyeders ist nach obiger Überlegung $< \kappa$; dieser Fall kann somit nicht eintreten. Da dieselben Überlegungen für D gelten, ist das Volumen eines Doppelvierecks von **P** kleiner oder gleich dem Volumen eines Doppelvierecks gleicher Fläche mit BC = CD = DE, AC = CF sowie AD = DF.

**(b)** Es sei also AC = CF, und $S_2$ sei die Eckensinussumme der Dreiecke ABC und BFC. Dann ist:

$$S_2 = |A,B,C| + |B,F,C| = B \cdot C\times(A-F) =: B\cdot q$$

Wegen AC = CF ist C ein Punkt des Großkreises $\Gamma$, der alle Punkte enthält, die zu A und F denselben Abstand besitzen. Der Vektor q ist sowohl orthogonal zu C als auch orthogonal zu A-F. Daher ist $Q = q/|q|$ ebenfalls ein Punkt von $\Gamma$ und hat von C den Abstand $\pi/2$. Dieser Punkt Q befindet sich dabei in demselben (offenen) Halbraum, zu dem auch B gehört und der durch die Ebene begrenzt wird, die den Kugelmittelpunkt O sowie die Punkte A und F enthält.

Verändern wir die Lage von B so, daß die Fläche des Dreiecks ABF - und damit die Fläche des Doppelvierecks - nicht geändert wird, so bewegen wir B auf dem Lexell'schen Kreis des Dreiecks. Da der Lexell'sche Kreis durch die Gegenpunkte $A^c$ und $F^c$ von A und F führt, befindet sich sein Mittelpunkt auf dem Großkreis $\Gamma$, auf dem sich auch C und Q befinden.

Somit wird $S_2 = B\cdot q$ nur dann maximal, wenn B und q in dieselbe Richtung weisen, bzw. wenn B dem Punkt Q am nächsten kommt. Aus der Dreiecksungleichung folgt, daß dies dann der Fall ist, wenn auch B auf $\Gamma$ zu liegen kommt, d.h. dann ist AB = BF. Es können B und q dann jedoch auch in die entgegengesetzte Richtung weisen; in diesem Fall wird $S_2$ ein Minimum, wenn B auf $\Gamma$ zu liegen kommt, und kann nur dann maximal werden, wenn B mit $A^c$ oder $F^c$ zusammenfällt, d.h. wenn ein Mosaikdreiecke in ein Zweieck entartet. Dieses Dreieck besitzt eine Kante der Länge $\pi$ und daher verschwindenden Eckensinus. Daher ist in diesem Fall das Volumen von **P** kleiner oder gleich dem Volumen eines Polyedermosaiks mit höchstens 2n-5 Dreiecken, und somit kleiner $\kappa$. Insbesondere können wir annehmen, daß $S_2$ maximal wird, wenn B auf $\Gamma$ zu liegen kommt. Daher ist das Volumen des Doppelvierecks von **P** kleiner oder gleich dem Volumen eines Doppelvierecks gleicher Fläche, bei dem außer BC=CD=DE, AC=CF und AD=DF auch noch die Gleichungen AB = BF sowie AE = EF gelten.

**(c)** Unter diesen Bedingungen besitzen alle Dreiecke dieselbe Höhe h = AF/2 und dieselbe Basiskante a = BC = CD = DE; sie besitzen somit auch denselben Eckensinus. BE ist höchstens gleich $2\pi$, und daher ist $a < 2\pi/3$. Es sei nun M der Schnittpunkt von AF mit BE und es sei $a_1 :=$ BM und $a_2 :=$ ME. Die Fläche $\varepsilon_1$ von $\Delta$AMB bzw. $\Delta$BMF ist durch $g(a_1) = 2 \cdot \arctan\ (\tan\frac{a_1}{2} \cdot \tan\frac{h}{2})$ gegeben und die Fläche $\varepsilon_2$ von $\Delta$AME bzw. $\Delta$EMF durch $g(a_2)$.

Mit k := tan(h/2) erhalten wir:

$$g'(a_1) \;=\; k \cdot \frac{1+\tan^2(a_1/2)}{1+k^2\cdot\tan^2(a_1/2)} \quad \text{bzw.} \quad g''(a_1) \;=\; \frac{2\cdot\tan\frac{a_1}{2}\cdot(1+\tan^2\frac{a_1}{2})}{(1+k^2\cdot\tan^2\frac{a_1}{2})^2}\cdot k\cdot(1-k^2)\,.$$

Somit ist $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ für $0 < a < 2\pi/3 < \pi$ und für $-1 < k < 1$, d.h. $h < \pi/2$, streng konvex. In diesem Fall wird $\varepsilon$ wird kleinstmöglich, wenn $a_1 = a_2 = a/2$. Ist $h = \pi/2$, so ist $\varepsilon = a_1+a_2$ , und auch hier können wir $a_1 = a_2 = a/2$ setzen. Ist jedoch $h > \pi/2$, so ersetzen wir h durch $h' = \pi\text{-}h < \pi/2$, und verkleinern dadurch die Fläche des Doppelvierecks; sein Volumen bleibt wegen $\sin x = \sin(\pi\text{-}x)$ unverändert. Nun wird auch in diesem Fall $\varepsilon$ kleinstmöglich, wenn $a_1 = a_2$, und wir erhalten auch hier - evt. nach Umbenennungen - ein Doppelviereck mit Höhe $h \le \pi/2$. Nun sei $\varepsilon'$ die Fläche des symmetrischen und $\varepsilon$ die des ursprünglichen Doppelvierecks.

Ist beim symmetrischen Doppelviereck mit Fläche $\varepsilon' \le \varepsilon$ die Höhe $h = \pi/2$, so ist das Volumen des Polyeders stets kleiner $\kappa$, wie im folgenden bewiesen wird. Denn ist $\varepsilon < 3\pi$, so ist $\varepsilon'/6 < \pi/2$ und für das Volumen S des symmetrischen Doppelviereck gilt: $S < \sin(\varepsilon/6)$. Schätzen wir dann das Volumen des zweiten Doppelvierecks des Polyeders durch die Überlegungen in **(II.1)** nach oben ab, so erhalten wir mit den Bezeichnungen aus **(II.1)** für das Polyedervolumen die obere Abschätzung

$$S+H = \sin\frac{\varepsilon}{6} + 2\cdot G(y,\pi-2w) + 4\cdot G(w,z) \quad \text{mit } \varepsilon = 4\pi - (4\cdot(y+2z)-2\pi);$$

der Maximalwert dieser Funktion beträgt $\approx 1.79527$ und ist somit kleiner $\kappa$.

Ist hingegen $\varepsilon \ge 3\pi$, so ist $S = \sin(\varepsilon'/6) \le \sin(\pi/2) = 1$, aber die Summe der Flächeninhalte der übrigen sechs Dreiecke des Polyeders ist kleiner oder gleich $\pi$. Schätzen wir das Volumen dieser Dreiecke durch das Volumen kongruenter gleichseitiger Dreiecke mit gleicher Flächensumme nach oben ab, so erhalten wir für das Volumen des Polyeders die obere Abschätzung $v = 1+6\cdot U(x)$;

dabei ist $0 < x \leq \pi/6$. Die Funktion U ist nun für $0 < x < \pi/2$ streng monoton wachsend **(I.4)** und somit ist daher in diesem Fall das Volumen des Polyeders kleiner oder gleich $1+6\cdot U(\pi/6) \approx 1.6858$.

Also kann nur $h < \pi/2$ sein. Dann lassen wir bei fester Basiskante a die Höhe h wachsen und vergrößern dadurch die Fläche und das Volumen des Doppelviereckes. Dies können wir solange durchführen, bis $\varepsilon' = \varepsilon$ oder $h = \pi/2$. Da wir den zweiten Fall bereits ausschließen konnten, ist das Volumen des Doppelvierecks von **P** stets kleiner oder gleich dem Volumen eines Doppelvierecks gleicher Fläche, bei dem die angegebenen Symmetriebedingungen gelten ♦

**(3)** Nun können wir zeigen:

**Proposition 3:** *Ein 8-eckiges Polyeder* **P** *mit Volumen* $K \geq \kappa$ *bestehe aus zwei Doppelvierecken. Wurde eines davon der in Prop. 2 beschriebenen Symmetrisierung unterworfen, so ist sein Volumen S bei fester Fläche* $\varepsilon$ *kleiner oder gleich dem Volumen eines Doppelvierecks mit denselben Symmetrieeigenschaften, bei dem weiters zwischen der Höhe* $h = (AF)/2$, $0 < h < \pi/2$, *und der Basiskante* $a = BC = CD = DE$, $0 < a < 2\pi/3$, *folgende Gleichung gilt:*

$$\cos h = \frac{\cos a \cdot (1 + 2 \cdot \cos a)}{3 \cdot \cos (a/2)}$$

*In diesem Fall erhalten wir mit* $t = \cos (a/2)$, $1/2 < t < 1$:

$$S = 2/3 \cdot (1 - t^2) \cdot \sqrt{(1 + 2t - 8t^2 + 8t^3) \cdot (-1 + 2t + 8t^2 + 8t^3)} =: s(t)$$

*sowie*

$$\tan^2 \frac{\varepsilon}{8} = \frac{(1-t)^2 \cdot (1+2t)^2}{(1+t)^2 \cdot (1-2t)^2} \cdot \frac{(-1 + 2t + 8t^2 + 8t^3)}{(\ 1 + 2t - 8t^2 + 8t^3)} =: p(t).$$

*Die Funktion* s *besitzt dabei genau eine Maximalstelle bei* $t = 1/\sqrt{2}$, *und ist daher streng monoton wachsend für* $t < 1/\sqrt{2}$ *und streng monoton fallend für* $t > 1/\sqrt{2}$. *Die Funktion* p *ist streng monoton fallend.*

Beweis: Jedes Doppelviereck, das die genannten Symmetriebedingungen erfüllt, können wir in vier kongruente rechtwinkelige Dreiecke mit Katheten h und 3a/2 zerlegen. Für die Fläche des Doppelvierecks gilt daher:

$$\tan \frac{\varepsilon}{8} = \tan \frac{3a}{4} \cdot \tan \frac{h}{2}.$$

Die Dreiecke des Doppelvierecks besitzen die gemeinsame Höhe h und dieselbe Basiskante a. Ihr Eckensinus ist somit derselbe und das Volumen des Doppelvierecks ist gegeben durch:

$$S = \sin a \cdot \sin h .$$

Wir bilden die Lagrange-Funktion $\Lambda = \sin a \cdot \sin h + \lambda \cdot (\tan\frac{\varepsilon}{8} - \tan\frac{3a}{4} \cdot \tan\frac{h}{2})$ und beachten, daß das Volumen S bei fester Fläche ε nur dann extremal sein kann, wenn alle ersten partiellen Ableitungen von Λ verschwinden. Nun ist:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial a} = \cos a \cdot \sin h - \lambda \cdot \frac{3}{4} \tan\frac{h}{2} \cdot \sec^2 \frac{3a}{4} = 0 \text{ bzw. } \frac{\partial\Lambda}{\partial h} = \sin a \cdot \cos h - \lambda \cdot \frac{1}{2} \tan\frac{3a}{4} \cdot \sec^2 \frac{h}{2} = 0 .$$

Lösen wir diese Gleichungen nach λ auf, so erhalten wir durch Gleichsetzen der Terme:

$$\cos h = \frac{\cos a \cdot (1 + 2 \cdot \cos a)}{3 \cdot \cos (a/2)} .$$

Somit muß zwischen a und h die angegebene Gleichung erfüllt sein, damit bei fester Fläche ε das Volumen S des Doppelvierecks extremal werden kann. Wird an dieser Stelle das Volumen S des Doppelvierecks minimal, so kann S nur dann maximal werden, wenn h = 0 oder h = π/2. Im ersten Fall verschwindet das Doppelviereck, und das Volumen von **P** ist sicher kleiner κ. Davon, daß auch im zweiten Fall, d.h. wenn h = π/2, das Volumen von **P** sicher kleiner κ ist, haben wir uns bereits bei dem Beweis der Proposition 2 überzeugt.

Bei einem Doppelviereck, das die Symmetrieeigenschaften der Proposition 2 erfüllt, und bei dem die genannte Gleichung gilt, sei $t = \cos (a/2)$; dabei ist 1/2 < t < 1 wegen 0 < a < 2π/3.

Dann folgt daraus:

$$\cos\frac{3a}{2} = t \cdot (4t^2 - 3) , \ \cos h = \frac{(1-4t^2) \cdot (1-2t^2)}{3t} \text{ , bzw.:}$$

$$S = \sqrt{1 - \cos^2 a} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 h} =$$

$$2/3 \cdot (1-t^2) \cdot \sqrt{(1 + 2t - 8t^2 + 8t^3) \cdot (-1 + 2t + 8t^2 + 8t^3)} =: s(t),$$

sowie:

$$p = \tan^2\frac{\varepsilon}{8} = \tan^2\frac{3a}{4} \cdot \tan^2\frac{h}{2} = \frac{1 - \cos (3a/2)}{1 + \cos (3a/2)} \cdot \frac{1 - \tan (a/2)}{1 + \tan (a/2)} .$$

$$= \frac{(1-t)^2 \cdot (1+2t)^2}{(1+t)^2 \cdot (1-2t)^2} \cdot \frac{(-1 + 2t + 8t^2 + 8t^3)}{(\ 1 + 2t - 8t^2 + 8t^3)}$$

Die erste Ableitung von $S^2$ ist durch

$$ds := \frac{d}{dt}\ S^2 = \frac{16}{9} \cdot (1 - t^2) \cdot t \cdot (11 - 40\,t^2 \cdot (1 - 2t^2)) \cdot (\ 1 - 2t^2)$$

gegeben. Dieser Ausdruck verschwindet für $1/2 < t < 1$ nur bei $t = 1/\sqrt{2}$, denn die Funktion $11 - 40\,t^2 \cdot (1 - 2t^2)$ ist für $1/2 < t < 1$ streng monoton wachsend und $> 0$ für $t = 1/2$. Somit ist S für $1/2 < t < 1/\sqrt{2}$ streng monoton wachsend und für $1/\sqrt{2} < t < 1$ streng monoton fallend.

Daraus folgt:

$$s(t) \le s(1/\sqrt{2}) = 1 \text{ für } 1/2 < t < 1 \text{ und } s(t) \le s(\sqrt{3}/2) \text{ für } \sqrt{3}/2 \le t < 1.$$

Die Funktion p ist im angegebenen Bereich für t streng monoton fallend, denn es ist:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{12\cdot(1-t)\cdot t^2\cdot(1+2t)\cdot(11-40t^2\cdot(1-2t^2))}{(1+t)^3\cdot(1-2t)^3\cdot(1+2t-8t^2+8t^3)^2} < 0, \text{ da } 1\text{-}2t < 0 \text{ für } 1/2 < t < 1.$$

Die Behauptungen der Proposition 3 sind damit bewiesen ♦

**(4)** Das Polyeder **P** besteht aus zwei Doppelvierecken, und sein Volumen sei $\ge \kappa$. Aus den Propositionen 2 und 3 folgt, daß das Volumen jedes der beiden Doppelviereck kleiner oder gleich dem Volumen eines flächengleichen Doppelvierecks ist, bei dem die Bedingungen von Prop. 2 und Prop. 3 gelten. Somit ist das Volumen von **P** kleiner oder gleich $W = s(x)+s(y)$. Da sich die Flächen der Doppelvierecke auf $4\pi$ ergänzen, muß $p(x)\cdot p(y) = \tan\frac{\varepsilon_1}{8}\cdot\tan\frac{\varepsilon_2}{8} = 1$ gelten. Dabei sind s und p die in Prop. 3 definierten Funktionen; x, y sind die entsprechenden Werte für den Parameter t.

Um eine obere Abschätzung für das Volumen von **P** zu erhalten, haben wir W unter der Nebenbedingung $p(x)\cdot p(y) = 1$ und $1/2 < x, y < 1$ zu untersuchen.

Da p streng monoton fällt, ist für $x \le 1/\sqrt{2}$: $p(1/\sqrt{2})\cdot p(y) \le p(x)\cdot p(y) = 1$, und daraus folgt $y \ge \sqrt{3}/2$. Mit den Bemerkungen zur Funktion s im Korollar folgt für diesen Fall:

$$W = s(x)+s(y) \le s(1/\sqrt{2}) + s(\sqrt{3}/2) < 1 + 0.7901 = 1.7901 < 1.81572 .$$

Daher können wir uns daher im weiteren auf $1/\sqrt{2} < x, y < \sqrt{3}/2$ beschränken. Aus den ersten Ableitungen der Lagrange-Funktion $L = s(x) + s(y) + \lambda\cdot(1 - p(x)\cdot p(y))$ nach x bzw. y erhalten wir:

$$\frac{s'(x)}{p'(x)\cdot p(y)} = \lambda = \frac{s'(y)}{p'(y)\cdot p(x)} \text{ bzw. } M(x) := s'(x)\cdot\frac{p(x)}{p'(x)} = s'(y)\cdot\frac{p(y)}{p'(y)} =: M(y) \text{ mit}$$

$$M(t) = \frac{1}{9t}\cdot(4t^2-1)\cdot\sqrt{(1+2t-8t^2+8t^3)\cdot(-1+2t+8t^2+8t^3)}\cdot(1-t^2)\cdot(2t^2-1).$$

Nun ist im angegebenen Bereich $\frac{4t^2-1}{9t} > 0$ und $\frac{d}{dt}\left(\frac{4t^2-1}{9t}\right) = \frac{1+4t^2}{9t^2} > 0$. Auch der Ausdruck unter der Wurzel ist positiv, und weiters gilt für $1/\sqrt{2} < t < \sqrt{3}/2$:

$$\frac{d}{dt}(1+2t-8t^2+8t^3)\cdot(-1+2t+8t^2+8t^3) = 8t\cdot(5+16t^2\cdot(-1+3t^2)) > 0.$$

Zuletzt ist auch $(1-t^2)\cdot(2t^2-1) > 0$ und $\frac{d}{dt}(1-t^2)\cdot(2t^2-1) = 2t\cdot(3-4t^2) > 0$ für $1/\sqrt{2} < t < \sqrt{3}/2$. Somit sind für $1/\sqrt{2} < t < \sqrt{3}/2$ alle Teile vom M positiv und streng monoton wachsend. M ist somit das Produkt positiver und streng monoton wachsender Funktionen, und daher ist M ebenfalls positiv und streng monoton wachsend; dies folgt aus der Produktregel. Daher kann $M(x) = M(y)$ nur eintreten, wenn $x = y$, und daher wird W im angegebenen Bereich nur dann extremal, wenn x = y.

Wird W jedoch minimal bei x = y, so kann W nur für x = 1 oder $x = 1/\sqrt{2}$ maximal. Im ersten Fall ist s(x) = 0, d.h. eines der beiden Doppelvierecke verschwindet; im zweiten ist $y > \sqrt{3}/2$, und somit ist in beiden Fällen das Volumen des Polyeders < κ ≈ 1.815712.

Daher nimmt die Funktion W unter p(x)·p(y) = 1 ihr Maximum genau dann an, wenn t:= x = y. Dann ist p(t)=1 $\Leftrightarrow 1-15t^2+20t^4 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{3+\sqrt{29/5}}{8}}$ und in diesem Fall ist W = κ. Somit gilt für das Volumen S des Polyeders: κ ≤ S ≤ κ. Da diese Ungleichungskette nur dann erfüllt sein kann, wenn überall Gleichheit gilt, und daher haben wir gezeigt:

**Satz**: *Das für n = 8 optimale Polyeder besteht aus zwei kongruenten, symmetrischen Doppelvierecken; sein Volumen beträgt* $\sqrt{\frac{475+29\cdot\sqrt{145}}{250}} \approx 1.81572$